Conociendo propiedades de la Transformada de Fourier mediante la solución de ejercicios

Sofía Bustos Aponte[*1] and Alfredo Uribe[**2]

[1]Instituto de Física, Universidad de Antioquia (UdeA) Calle 70 No. 52-21, Medellín, Colombia
[2]Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana, Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina, Iztapalapa, C.P. 09340, México D.F., Mexico

8 de junio de 2024

1. Convolución

1.1. Una función simple.

$$\text{Sea } f(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 0\,, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a). Cálculo de la convolución de f consigo misma

Calculemos $f * f$. Por definición de convolución se tiene que

$$(f * f)(x) = \int_{-\infty}^{-1} f(x-y)f(y)\,dy + \int_{-1}^{1} f(x-y)f(y)\,dy + \int_{1}^{\infty} f(x-y)f(y)\,dy\,.$$

Teniendo en cuenta el enunciado $f(y) = 0$ para $|y| \geq 1$, podemos reescribir a $(f * f)(x)$ y sustitur $u = x - y$ para simplificar la integral y considerar posibles casos para x,

$$(f * f)(x) = \int_{-1}^{1} f(x-y)f(y)\,dy = \int_{x-1}^{x+1} f(u)\,du\,.$$

i) $x = 0$.

$$(f * f)(0) = \int_{-1}^{1} f(u)\,du = 2\,.$$

Si $x = 0$ entonces $(x-1, x+1) = (-1, 1)$ pero si consideramos valores fuera de ese intervalo, tales como $x = \frac{3}{2}$ y $x = \frac{-3}{2}$ vemos que obtenemos un valor dentro del intervalo $(-1, 1)$,

$$(f * f)\left(\frac{3}{2}\right) = \int_{1/2}^{5/2} f(u)\,du = \frac{1}{2}\,, \qquad (f * f)\left(-\frac{3}{2}\right) = \int_{-5/2}^{-1/2} f(u)\,du = \frac{1}{2}\,.$$

[*] ✉ sofia.bustos@udea.edu.co
[**] ✉ alur@xanum.uam.mx

De manera más general, si consideramos valores fuera de $(x-1, x+1)$ tales que $x-1<1$ y $-1<x+1$ obtenemos el intervalo $-2<x<2$ del cual podemos relacionar $x-1$ y $x+1$ operando en ambos lados de la desigualdad y reescribir el intervalo como $-3<x-1<1$ y $-1<x+1<3$.

Por otro lado, podemos establecer una relación para los extremos del intervalo $(-1,1)$ cuando $x=0$ y cuando $(x-1, x+1)$ es decir: $x+1-(-1)=x+2$ y $1-(x-1)=2-x$. Así, determinamos el calculo de $f*f$ en función de los valores que puede tomar x,

$$(f*f)(x)=\begin{cases} 0, & \text{si} \quad x \notin (-2,2) \\ x+2, & \text{si} \quad x \in (-2,0] \\ 2-x, & \text{si} \quad x \in (0,2) \end{cases}$$

(b). Ejemplo de convolución y convergencia puntual

Sea $f_\epsilon(x)=\epsilon^{-1}f(\epsilon^{-1}x)$ y $g(x)=x^3-x$. Calcule $f_\epsilon * g$ y verifique directamente que $f_\epsilon * g \to 2g$ cuando $\epsilon \to 0$.

Por definición, la convolución entre $f_\epsilon * g$ es

$$(f_\epsilon * g)(x)=\int_{-\infty}^{-\epsilon} f_\epsilon(y)g(x-y)\,dy+\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} f_\epsilon(y)g(x-y)\,dy+\int_{+\epsilon}^{\infty} f_\epsilon(y)g(x-y)\,dy\,.$$

Similar al inciso (a), en la única integral no nula se cumple que $-\epsilon<y<\epsilon$. Entonces, $-1<\frac{y}{\epsilon}<1$ y así $f(\frac{y}{\epsilon})=1$.

$$\begin{aligned}
(f_\epsilon * g)(x) &= \frac{1}{\epsilon}\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} g(x-y)\,dy \\
&= \frac{1}{\epsilon}\int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} g(u)\,du && \text{(cambio de variable)} \\
&= \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{u^4}{4}-\frac{u^2}{2}\right)\Big|_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} && \text{(resolvemos la integral)} \\
&= \frac{1}{\epsilon}\left[\frac{(x+\epsilon)^4}{4}-\frac{(x+\epsilon)^2}{2}-\frac{(x-\epsilon)^4}{4}+\frac{(x-\epsilon)^2}{2}\right] && \text{(binomio de Newton)} \\
&= 2x^3+2x\epsilon^2-2x && (\epsilon \text{ tiende a cero}) \\
&\to 2(x^3-x)=2g(x)
\end{aligned}$$

2. Transformada de Fourier

2.1. Propiedad de la Transformada de Fourier

Sea f del ejercicio 1.1. Calcule $\hat{f}$ y $(\hat{f}*\hat{f})$. Usando propiedades de la transformada de Fourier verifique que $(\hat{f}*\hat{f})=(\hat{f})^2$

Utilizando la definición de transformada de Fourier y siguiendo un procedimiento similar al desarrollado en 3.(a), podemos deducir una expresión para $\hat{f}$ calculando la integral y relacionando el resultado con la función trigonométrica del seno complejo.

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{-1} e^{-i\xi x} f(x)\,dx + \int_{-1}^{1} e^{-i\xi x} f(x)\,dx + \int_{1}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x)\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} e^{-i\xi x}\,dx = -\frac{1}{i\xi} e^{-i\xi x}\Big|_{x=-1}^{x=1} \\
&= \frac{2}{\xi}\left(\frac{e^{i\xi} - e^{-i\xi}}{2i}\right) = \frac{2}{\xi}\sin(\xi)\,.
\end{aligned}
$$

Recordando como se obtuvo $(f * f)(x)$ en 1.1 analizando cada intervalo, $f * f$ es distinta de cero cuando $|x| < 2$. De esta forma, podemos reescribir la integral como la suma de tres integrales. Note que las dos últimas integrales se resuelven mediante integración por partes.

$$
\begin{aligned}
(f * f)\hat{} &= \int_{-2}^{0} e^{-i\xi x}(x+2)\,dx + \int_{0}^{2} e^{-i\xi x}(2-x)\,dx \\
&= \int_{-2}^{0} e^{-i\xi x} x\,dx + \int_{-2}^{0} 2e^{-i\xi x}\,dx + \int_{0}^{2} 2e^{-i\xi x}\,dx - \int_{0}^{2} e^{-i\xi x} x\,dx \\
&= \int_{-2}^{2} 2e^{-i\xi x}\,dx - \int_{0}^{2} e^{-i\xi x} x\,dx + \int_{-2}^{0} e^{-i\xi x} x\,dx
\end{aligned}
$$

Simplificando la expresión anterior, obtenemos:

$$
(f * f)\hat{}(\xi) = \frac{2}{\xi^2}(1 - \cos(2\xi)) = \frac{4}{\xi^2}\sin^2(\xi) = (\hat{f})^2(\xi).
$$

2.2. Versión modificada del Teorema de Inversión de Fourier

Suponga que $g \in L^1$, $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = 1$ y $\hat{g} \in L^1$.

(a). Ejemplo de convergencia puntual

Muestre que $\hat{g}(\delta\xi) \to 1$ cuando $\delta \to 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$.

Sea $h_n(x) := e^{-\frac{1}{n} i\xi x} g(x)$. Observe que $|h_n(x)| = |g(x)|$. De esta forma, $\int_{-\infty}^{\infty} |h_n(x)| = \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\,dx < \infty$.

Por lo que si tomamos $h_n(x) := e^{-\frac{1}{n} i\xi x} g(x)$ con un $x \in \mathbb{R}$ fijo y vemos que pasa cuando $n \to \infty$ tenemos

$$
\lim_{n\to\infty} h_n(x) = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{n} i\xi x} g(x) = g(x).
$$

Si integramos en ambos lados de la igualdad y tenemos en cuenta las hipótesis del ejercicio, podemos usar el Teorema de la Convergencia Dominada e intercambiar el límite con la integral. Dándonos cuenta de que la integral descrita no es más que la definición de transformada de Fourier con $\delta = \frac{1}{n}$,

$$
\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{n} i\xi x} g(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \hat{g}(\delta\xi) = 1
$$

Así podemos concluir que $\hat{g}(\delta\xi) \to 1$ cuando $\delta \to 0$.

(b). Otra forma de expresar el Teorema de Inversión de Fourier

Muestre que para cualquier función continua $f \in L^1$

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x}\hat{g}(\delta\xi)\hat{f}(\xi)\,d\xi = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Usando la definición de Transformada de Fourier para $\hat{f}(\xi)$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x}\hat{g}(\delta\xi)\hat{f}(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x}\hat{g}(\delta\xi)\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi y}f(y)\,dy\right]d\xi. \tag{1}$$

Si verificamos que ambas integrales son absolutamente convergentes, podremos intercambiar el orden de integración. Como $f \in L^1$, entonces $\int_{-\infty}^{\infty}|f(y)|\,dy < \infty$. Por otra parte, realizando la sustitución $u = \delta\xi$ concluímos que $\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{g}(u)|\,du < \infty$. En efecto,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|e^{i\xi x}\hat{g}(\delta\xi)e^{-i\xi y}f(y)|\,dy\,d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{g}(\delta\xi)f(y)|\,dy\,d\xi \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{g}(\delta\xi)|\,d\xi\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty}|f(y)|\,dy\right] < \infty.\end{aligned}$$

Usando (1),

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x}\hat{g}(\delta\xi)\hat{f}(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi(x-y)}\hat{g}(\delta\xi)\,d\xi\,dy = \frac{1}{\delta}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\eta}{\delta}(x-y)}\hat{g}(\eta)\,d\eta,$$

donde $\eta = \delta\xi$ en el lado derecho de la igualdad anterior.

De acuerdo con el Teorema de Inversión de Fourier [1, Sección 7.2], si $\hat{f} \in L^1$, entonces f es continua y además $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x}\hat{f}(\xi)\,d\xi$ para $x \in \mathbb{R}$.

Al usar apropiadamente la definición de $f(x)$ para g, definimos g_δ, (ver inciso (b) de la subsección 1.1) y simplificamos la expresion (1),

$$\frac{1}{\delta}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\eta}{\delta}(x-y)}\hat{g}(\eta)\,d\eta = \frac{2\pi}{\delta}g\left(\frac{x-y}{\delta}\right) = 2\pi g_\delta(x-y).$$

De esta forma,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g_\delta(x-y)\,dy = (f * g_\delta)(x).$$

Finalmente,

$$\lim_{\delta\to 0}(f * g_\delta)(x) = f(x)$$

2.3. Aplicación del Teorema del Residuo

Use el Teorema del Residuo para mostrar que

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^4+1}\right](\xi) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}e^{|\xi|/\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right) + \sin\left(\frac{|\xi|}{\sqrt{2}}\right)\right).$$

Por definición de transformada de Fourier,

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^4+1}\right](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\xi x}}{x^4+1}\,dx.$$

Utilizar algún método común de integración parece ser una tarea complicada pero posible si analizamos el integrando mediante variable compleja. Es fácil ver que $g(x) = \frac{e^{-i\xi x}}{x^4+1}$ tiene cuatro polos simples. Al tomar el contorno de integración en el semiplano superior, son de interés los dos polos que se encuentran allí.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi x}}{x^4+1}\, dx = 2\pi i \left[Res(g, z_1) + Res(g, z_2)\right]$$

Como $z_1 = e^{\frac{\pi}{4}i}$ y $z_2 = e^{\frac{3\pi}{4}i}$ son simples, una forma fácil de calcular los residuos es mediante límites.

$$Res(g, z_1) = \lim_{z \to z_1} (z - z_1)\frac{e^{-i\xi z}}{z^4+1} = \frac{\cos(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + i\frac{\xi}{\sqrt{2}}) - i\sin(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + i\frac{\xi}{\sqrt{2}})}{-2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}}$$

$$Res(g, z_2) = \lim_{z \to z_2} (z - z_2)\frac{e^{-i\xi z}}{z^4+1} = \frac{\cos(-\frac{\xi}{\sqrt{2}} + i\frac{\xi}{\sqrt{2}}) - i\sin(-\frac{\xi}{\sqrt{2}} + i\frac{\xi}{\sqrt{2}})}{2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}}$$

Tomando $u = \frac{\xi}{\sqrt{2}}$ y $v = \frac{\xi}{\sqrt{2}}i$ para simplificar la suma de los residuos obtenemos,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi x}}{x^4+1}\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{iv}(\cos(u) - \sin(u)) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \left(\cos\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right) - \sin\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

3. Aplicaciones

3.1. Caso general para la demostración de la desigualdad de Heisenberg

Sea f una función el $L^2(\mathbb{R})$ y sea $F(x) = e^{-i\alpha x} f(x + a)$

(a). Dispersión de f en el punto a

Muestre que $\Delta_a f = \Delta_0 F$

Por definición $\Delta_a f := \frac{\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2|f(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2 dx}$

$$\Delta_0 F = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |F(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2 dx} \qquad \text{(definición de dispersión aplicada a } F\text{)}$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x+a)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+a)|^2 dx} \qquad \text{(norma de la definición de } F\text{)}$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (u-a)^2 |f(u)|^2 du}{\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|^2 du} \qquad \text{(sustitución } u = x + a, du = dx\text{)}$$

$$= \Delta_a f$$

Referencias

[1] Folland, Gerald B, *Fourier analysis and its applications*, American Mathematical Soc. **4** (2009).

[2] Folland, Gerald B, *Real analysis: modern techniques and their applications*, John Wiley & Sons **40** (1999).